Université Aboubekr Belkaid-TLEMCEN	**A.U. 2017/2018**
Deuxième année G.C., G.M.	**Math3**

Examen final.

Exercice 1: (6 Pts)

I. Soit D le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$.

1) Tracer le domaine D.
2) Calculer l'intégrale double suivante

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

II. En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer l'intégrale triple suivante

$$\iiint_\Delta (x^2+y^2+z)dxdydz,$$

avec Δ est le cylindre défini par

$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \leq 9,\ -5 \leq z \leq 5\right\}.$$

Exercice 2: (4 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum_{n\geq 2} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}, \qquad 2) \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}.$$

Exercice 3: (5 Pts)

Soit la série entière suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3n\, 3^n}$$

1) Calculer le rayon de convergence R.
2) En déduire le domaine de convergence.
3) Calculer la somme de la série entière.

Exercice 4: (5Pts)

Soit f une fonction $2\pi-$ périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ 2-x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

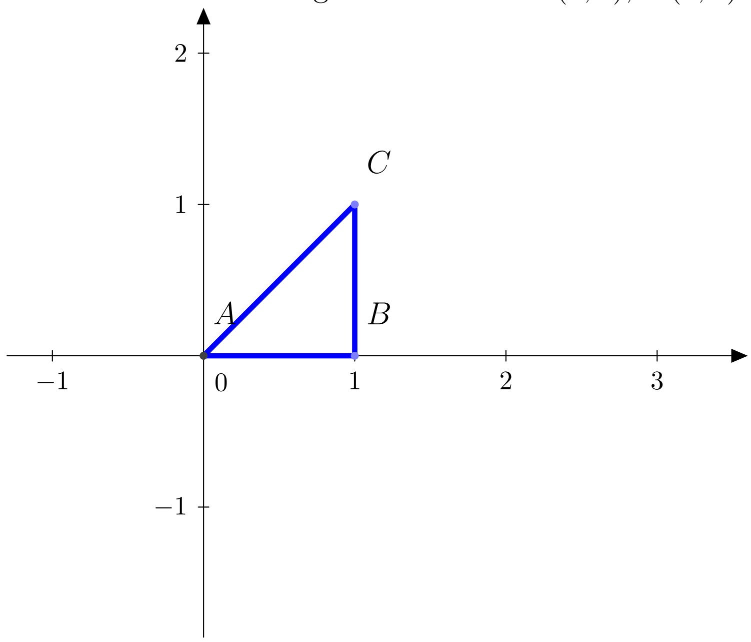
1) Tracer le graphe de la fonction f.
2) Calculer les coefficients de Fourier associés à f.
3) Écrire le développement en série de Fourier de f.

Université Aboubekr Belkaid-TLEMCEN	A.U. 2017/2018
Deuxième année G.C., G.M.	Math3

Examen final : Correction

Exercice 1 : (6 Pts)

Le domaine D est le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$.



Le domaine élémentaire est donné par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}.$$

Le calcul de l'intégrale double se fait comme suit :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{dxdy}{(x^2+1)(y^2+1)} = \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{dy}{(x^2+1)(y^2+1)}\right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)} \left[\arctan(x) - \arctan(0)\right] dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{(x^2+1)} dx. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$I = \left[\frac{\arctan^2(x)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

II. Nous rappelons que Δ est le cylindre défini par

$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \leq 9,\ -5 \leq z \leq 5\right\}.$$

Alors, en utilisant les coordonnées cylindriques, c'est à dire,

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x^2+y^2 = r^2 \\ \\ dxdydz = rdrd\theta dz, \end{array}$$

nous avons

$$\iiint_\Delta (x^2+y^2+z)dxdydz = \int_{-5}^5 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 r(r^2+z)dr\right] d\theta\right] dz = 2\pi \int_{-5}^5 \left[\frac{r^4}{4} + z\frac{r^2}{2}\right]_0^3 dz = 405\pi.$$

Exercice 2 : (4 Pts)

Pour la nature la série numérique suivante,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(n+1)(n-2)}{n!},$$

on applique le critère de D'Alembert et calculons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n-1)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(n+1)(n-2)} = 0 < 1.$$

Ceci veut dire que cette série est convergente.
Quant à la série suivante (de termes qui changent de signe),

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{n^3}{3^n},$$

nous utilisons la notion de la convergence absolue et on a

$$\sum_{n\geq 0} \left| (-1)^n \frac{n^3}{3^n} \right| = \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{3^n}.$$

La convergence de cette série découle directement par le critère de D'Alembert. En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Donc, la série est convergente.

Exercice 3 : (5 Pts)

Soit la série entière suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3n\, 3^n}, \qquad \text{avec} \quad U_n(x) := \frac{x^{2n}}{3n\, 3^n}.$$

Pour obtenir le rayon de convergence, on calcule la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \frac{x^2}{3}.$$

- Si $x^2 < 3$ (i.e. $|x| < \sqrt{3}$) alors la série converge absolument.
- Si $x^2 > 3$ (i.e. $|x| > \sqrt{3}$) alors la série diverge.

Par conséquent,

$$R = \sqrt{3}.$$

Pour compléter le domaine de convergence, il reste à traiter les cas critiques pour $|x| = \sqrt{3}$. Si $|x| = \sqrt{3}$ alors la série devient

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Nous savons que la série ci-dessus est divergente. Donc, le domaine de convergence est

$$D =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[.$$

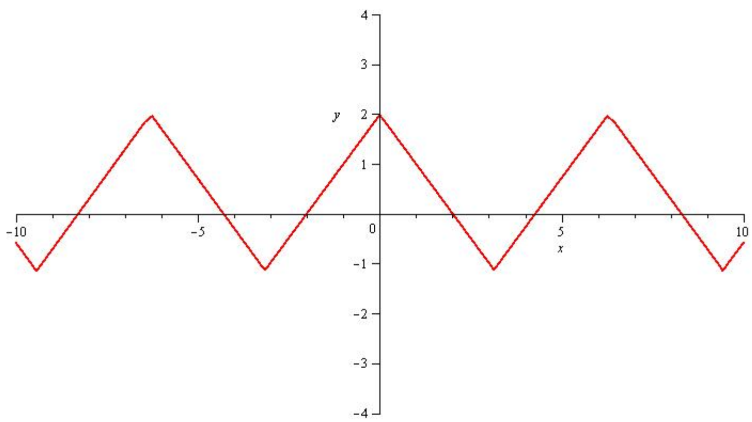
Quant à la somme de cette série, elle est donnée par, pour tout $x \in D$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3n\,3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^n}{n} = -\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{x^2}{3}\right).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4 : (5 Pts)}}$

Soit f une fonction $2\pi-$périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2+x, & \text{si } \; -\pi \leq x < 0, \\ 2-x, & \text{si } \; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$



Depuis le dessin, nous constatons que la fonction est **paire**. Pour le calcul des coefficients de Fourier, nous avons déjà $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (En utilisons la parité de cette fonction). Nous avons aussi

$$a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2-x)\;dx = 4-\pi,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\;dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2-x)\cos(nx)\;dx. \qquad \text{(par parité)}$$

D'un autre côté, on a

$$\int_0^{\pi}(2-x)\cos(nx)\;dx = \left[\frac{2-x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\;dx = \frac{1}{n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right].$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right].$$

Le développement en série de Fourier associé à f est donné par

$$S(x) = \frac{4-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\cos(nx).$$